مدل‌سازی و تحلیل هم‌زمان مسایل تنش مسطح با مصالح FG به روش ایزوژئومتریک*

(یادداشت پژوهشی)

بهروز حسنی[۱] ناصرظریف مقدم[۲]

چکیده *در دهه‌های اخیر، نوع جدیدی از مواد کامپوزیت که در واقع پیشرفته ترین نوع آن‌ها نیز می‌باشد، در دنیا معرفی شده است که با عنوان مصالح FG شناخته می‌شوند. در این مصالح، مدول الاستیسیته به صورت یک تابع پیوسته در سراسر دامنه‌ی مسأله تغییر می‌کند. با توجه به این‌که روش اجزای محدود در حل این دسته از مسایل دارای نقاط ضعف مشخصی می‌باشد، لذا در این پژوهش به روش مدل‌سازی و تحلیل سازه های ساخته شده با این مصالح با روش ایزوژئومتریک پرداخته و برخی از نقاط ضعف روش اجزای محدود نیز بدین وسیله برطرف شده است. از مزایای روش ایزوژئومتریک نسبت به روش اجزای محدود، می‌توان به حذف مرحله‌ی شبکه‌بندی مسأله و کاهش چشم‌گیر تعداد مجهولات و ابعاد دستگاه معادلات حاصله نام برد. در انتها نیز با حل مثال، دقت و توانمندی این روش، نشان داده شده است.*

واژه‌های کلیدی روش ایزوژئومتریک، مصالح FG، مسایل تنش مسطح ، تکنیک نربز

An Isogeometrical Approach to the Simultaneous Modeling and Analysis of FGM Plane Stress Problems

B. Hassani N. Z. Moghaddam

Abstract *The Functionally Graded Materials (FGM) have been introduced in the last few decades. In these materials the modulus of elasticity can vary as a continuous function throughout the domain of the problem. Due to some weaknesses of the Finite Element Method (FEM) in dealing with these problems, a slightly different version of the recently developed Isogeometric Analysis (IA) method is employed to overcome some of the deficiencies of the FEM. Amongst the benefits of the proposed method, elimination of the burden of mesh generation and a considerable reduction in the size of unknowns and consequently the number of the resulted equations can be named. Finally, the accuracy and robustness of the method is illustrated by a couple of examples.*

Key Words Isogeometric Analysis, Functionally Graded Materials, Plane Elasticity, NURBS.

---

*نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۱۳۸۸/۱۰/۲ و نسخه‌ی نهایی آماده چاپ آن در تاریخ ۱۳۸۹/۸/۲۹ می‌باشد.

(۱) دانشیار گروه عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

(۲) عهده‌دار مکاتبات: دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه صنعتی شاهرود

مقدمه

امروزه برای حل مسایلی که پیش روی مهندسین و محققین قرار دارد، ناگزیر به حل معادلاتی می‌شوند که اغلب دارای شکل دیفرانسیلی بوده و در واقع با حل این معادلات دیفرانسیل، مسأله تحلیل شده و به جواب مورد نظر دست می‌یابیم. اما چون تعداد محدودی از این معادلات را می‌توان به صورت تحلیلی حل نمود، لذا روش‌های حل دیگری که آن‌ها را با عنوان روش‌های عددی می‌شناسیم، توسعه یافته‌اند. البته روش‌های عددی با ظهور کامپیوترها رشد چشم‌گیری داشته‌اند و امروزه به کمک کامپیوترها و روش‌های عددی موجود، قادر به حل معادلات بسیار پیچیده در حوزه‌های متنوع علوم می‌باشیم. برخی از روش‌های عددی معروف، عبارتند از: روش تفاضلات محدود (FDM) (Finite Difference Method)، روش اجزای محدود (FEM) (Finite Element Method)، روش نقاط محدود (Finite Point Method or Meshless Method) (FPM) و روش‌های جدیدتری مانند: روش تحلیل ایزوژئومتریک (IA) (Isogeometric Analysis). این روش‌ها هر یک در پی دیگری آمده و دو هدف اصلی را دنبال کرده‌اند. این اهداف عبارتند از: اولاً ایجاد کارایی، دقت و سرعت بالاتر و ثانیاً ایجاد امکاناتی جدیدتر برای حل مسایل و رفع مشکلات روش‌های قبلی.

استفاده از روش اجزای محدود در تحلیل سازه‌های پیچیده و مکانیک محاسباتی به امری معمول تبدیل شده است. شاید بتوان گفت که توسعه‌ی این روش در سال‌های گذشته و وجود نرم افزارهای متعدد تجاری، سبب کاربرد وسیع این روش در علوم مختلف از جمله علوم سازه و مکانیک شده است؛ اما باید دانست مزایای مهمی مانند سیستماتیک بودن روش اجزای محدود در یافتن توابع تقریب زننده، مدل‌سازی شکل‌های پیچیده، قابلیت تبدیل به الگوریتم‌ها و کدهای کامپیوتری و پیشرفت سریع کامپیوترها، از علل فراگیر شدن استفاده از این روش می‌باشد.

اما روش اجزای محدود دارای معایبی نیز می‌باشد. مثلاً با این‌که این روش، توانایی مدل‌سازی اشکال پیچیده را دارا می‌باشد، ولی برای بالا رفتن دقت لازم است که تعداد و یا مرتبه‌ی المان‌ها افزایش یابد که خود سبب بزرگ شدن دستگاه معادلات حاکم و گاه حل مسایل ناممکن و یا بسیار سخت و زمان‌بر می‌شود. تولید شبکه‌ی اجزای محدود نیز از اشکالات دیگر روش مذکور است که تاکنون وقت زیادی را از محققین برای تولید روش‌های پایدار و کارآمد تولید شبکه گرفته است. هم‌چنین به طور میانگین برای حل یک مسأله‌ی اجزای محدود، حدود هشتاد درصد، زمان حل مسأله صرف تولید شبکه اجزای محدود می‌شود [1]. اشکالات دیگری نیز در روش اجزای محدود وجود دارد که در ادامه بیان می‌شود.

روش عددی حل مسایل با استفاده از اسپلاین‌ها، روشی جدید است که مفاهیم آن در سال ۲۰۰۵ برای اولین بار توسط هیوز (Hughes) و هم‌کارانش با نام روش ایزوژئومتریک معرفی گردید [1]. این روش مبتنی بر درک هندسی از مسأله و تولید جواب‌های مسأله با استفاده از اسپلاین‌ها و نوع توانمندتر آن، یعنی نربز (NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline)) می‌باشد. روش ایزوژئومتریک علاوه بر داشتن مزایای روش اجزای محدود، برخی از معایب آن را نیز مرتفع نموده است. در واقع مدل‌سازی دقیق شکل مسأله در مقایسه با روش اجزای محدود، مدل‌سازی دقیق شرایط تکیه‌گاهی در مقایسه با روش اجزای محدود که شرایط تکیه‌گاهی فقط در محل گره ها قابل اعمال است، عدم نیاز به تولید شبکه و کاهش چشم‌گیر ابعاد دستگاه معادلات از مزایای روش ایزوژئومتریک می‌باشد [1,2].

مصالح FG (Functionally Graded Materials) نیز امروزه به عنوان یکی از پیشرفته ترین انواع مواد کامپوزیت شناخته می‌شود. این مصالح به گونه‌ای ساخته می‌شوند که در آن‌ها تغییرات در جنس مصالح به نسبت توزیع مصالح در حجم ماده وابسته است و مانند

کامپوزیت‌های مرسوم این تغییرات مصالح ناگهانی نمی‌باشد؛ لذا تغییرات توزیع مصالح در حجم ماده سبب می‌شود تا مدول الاستیسیته نیز در کل دامنه تغییر نماید [3]. این تغییرات می‌تواند به صورت خطی، نمایی، لگاریتمی و غیره باشد که به چگونگی فرایند تولید این مصالح وابسته است [4,5]. در ادامه به جزئیات بیشتری در خصوص مصالح FG اشاره خواهد شد.

در این مقاله در بخش دوم به معرفی مصالح FG و در بخش سوم به معرفی اسپلاین‌ها و تکنیک نربز و شرح مختصر پارامترهای آن‌ها پرداخته‌ایم. در بخش سوم روش ایزوژئومتریک را در مقایسه با روش اجزای محدود معرفی کرده و در بخش چهارم، روش فرمولبندی مسایل تنش/کرنش مسطح ایزوتروپیک با استفاده از روش ایزوژئومتریک بیان شده است. در بخش پنجم نیز با حل مسایلی، توانایی روش مذکور را نشان داده‌ایم. در انتها نیز به بیان نتایج و پیشنهاداتی در این خصوص پرداخته شده است.

معرفی مصالح FG

تئوری مصالح FG برای اولین بار در دهه‌ی هشتاد میلادی، توسط گروهی از محققان علم مواد در ژاپن به دنیا معرفی شدند [3]. این مصالح، گونه‌ی جدیدی از مصالح کامپوزیت هستند که در ابتدا برای تحمل گرادیان‌های حرارتی در المان‌های مکانیکی به کار گرفته شدند؛ اما بعداً کاربردهای بسیار متنوع‌تری برای آن‌ها معرفی گردید از جمله‌ی این کاربردها این است که می‌توان از آن‌ها در کلیه‌ی قطعات مکانیکی و سازه‌ای که تحت گرادیان‌های شدید حرارتی، محیط‌های خورنده و غیره قرار دارند، استفاده نمود [4-8]. امروزه نیز از این مصالح به عنوان توصیه شده ترین گزینه برای تولید کامپوزیت‌های هوشمند، یاد می‌شود.

مصالح FG که گاه از آن‌ها با عنوان مصالح ناهمگن نیز یاد می‌شود، معمولاً دارای خواص مکانیکی، حرارتی، الکتریکی، خوردگی و ... بهتری نسبت به مصالح برخوردارند. در واقع در این مصالح، مدول الاستیسیته از یک طرف جسم تا طرف دیگر آن، به صورت پیوسته و با هر نوع تابع دلخواهی می‌تواند تغییر کند. علت تغییرات در مشخصات مکانیکی این مصالح، وجود تغییرات در توزیع مصالح در حجم جسم است. از مزایای این مصالح نسبت به کامپوزیت‌ها می‌توان به حذف مشکل چسبندگی مصالح مختلف و هم‌چنین لایه لایه شدن (delamination) و ایجاد تمرکز تنش در محل اتصال مصالح مختلف نام برد [9].

دو مشکل اساسی پس از معرفی تئوری مصالح FG در مقابل محققین قرار دارد: اول این‌که این مصالح در عمل چگونه تولید شوند که مورد بحث این مقاله نمی‌باشد. مشکل دوم این است که پس از ساخت این مصالح، چگونه می‌توان آن‌ها را تحلیل نمود؟ در مورد اخیر می‌توان از روش اجزای محدود کمک گرفت؛ ولی مشکلات زیادی به علت محدودیت‌های روش اجزای محدود ایجاد می‌شود. مثلاً عدم وجود یک المان مناسب برای تحلیل این مسایل که بتواند تغییرات مدول الاستیسیته را در خود جای دهد، اولین مشکل است. در غیر این صورت باید از المان‌هایی استفاده کرد که مشخصات مکانیکی آن المان میانگینی از مشخصات مکانیکی توزیع شده در سطح المان باشد؛ لذا در عمل برای بالا بردن دقت حل مسأله بایستی تعداد المان‌ها را به شکل چشم‌گیری زیاد کرد که خود سبب بزرگ شدن دستگاه معادلات و ازدیاد زمان حل مسأله می‌شود. هم‌چنین بایستی به تعداد المان‌ها اقدام به تعریف مصالح جدید نمود. به علت وجود همین مشکلات است که مسایل مربوط به مصالح FG فقط برای برخی حالات ساده و مشخص (به عنوان مثال مسایل تقارن محوری با توزیع توانی یا لگاریتمی مصالح) و به صورت تحلیلی حل شده است؛ البته کارهایی با روش اجزای محدود نیز انجام شده که به علت کامل نبودن آن‌ها هنوز هیچ یک از نرم افزارهای معروف اجزای محدود در دنیا قادر به حل کلی مسایل با مصالح FG نمی‌باشند. در این پژوهش

از روش ایزوژئومتریک که یکی از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد، برای حل مسایل استفاده شده است و مشکل اجزای محدود در خصوص مدل‌سازی مصالح نیز در این روش رفع شده است.

معرفی اسپلاین‌ها و تکنیک نربز

اسپلاین‌ها در واقع ابزاری ریاضی هستند که می‌توان با استفاده از اطلاعات اندکی، منحنی‌ها و سطوح پیچیده را به صورت عددی مدل نمود [11]. برای تولید یک منحنی اسپلاین در حالت کلی بایستی با برخی از تعاریف و مفاهیم آن آشنا بود که به اختصار در ادامه آمده است.

بردار گره. بردار $\mathbf{U}=\{u_0,u_1,u_2,...,u_m\}$ را در نظر بگیرید. این بردار، شامل مجموعه ای از اعداد حقیقی است به طوری که رابطه‌ی: $u_i \le u_{i+1}\ ,\ i=0,1,2,...,m-1$ در آن برقرار است. بردار $\mathbf{U}$ بردار گره (Knot Vector) و u_i ها مقادیر گرهی (Knots) نامیده می‌شوند. بازه $[u_i,u_{i+1})$ را یک دهانه گرهی (Knot Span) می‌نامیم که می‌تواند طول آن صفر باشد؛ زیرا گره ها لزوماً دارای مقادیر متمایز نمی‌باشند. اگر فاصله‌ی بین گره ها مساوی باشد، در این حالت بردار گره را یکنواخت (Uniform) می‌نامیم؛ در غیر این‌صورت، این بردار، غیر یکنواخت (Non-Uniform) خواهد بود.

توابع پایه اسپلاین. **i** امین تابع پایه اسپلاین با درجه p (یا مرتبه $p+1$) را با $N_{i,p}(u)$ نشان داده و به صورت رابطه‌ی (۱) تعریف می‌کنیم:

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & \text{if } u_i \le u < u_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$N_{i,p}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)+\frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u) \qquad (۱)$$

با توجه به روابط فوق، برخی از خواص پارامترهای موجود عبارتنداز:

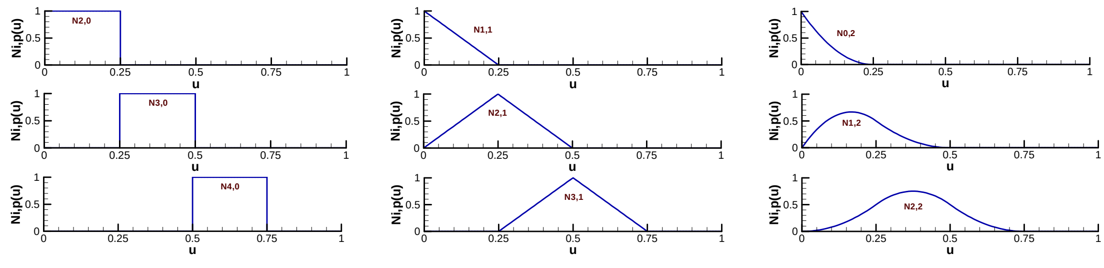
۱. $N_{i,0}(u)$ یک تابع پله‌ای (Step Function) بوده و به جز در بازه $u\in[u_i,u_{i+1})$ مقدار آن در سایر نقاط صفر است.

۲. برای $p>0$، آنگاه $N_{i,p}(u)$ ترکیب خطی از دو تابع پایه با درجه $p-1$ می‌باشد.

۳. برای محاسبه‌ی کلیه‌ی توابع پایه به بردار گره U و درجه‌ی p نیاز داریم.

٤. در صورتی که در رابطه (۲-۱) به تقسیم ٪ برسیم، آن را برابر با صفر لحاظ می‌کنیم.

۵. $N_{i,p}(u)$ ها، چند جمله‌ای‌های تکه‌ای (Piecewise Polynomial) هستند که بر روی یک خط حقیقی تعریف شده و فقط بازه $[u_0,u_m]$ را تحت تأثیر قرار می‌دهند. در ادامه، برای سادگی به جای $N_{i,p}(u)$ از $N_{i,p}$ استفاده می‌کنیم. هم‌چنین به عنوان یک مثال اگر درجه تابع پایه به ترتیب برابر با $p=0,1,2$ و بردار گره برابر با $\mathbf{U}=\{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$ باشد، می‌توان توابع پایه را در شکل (۱) ملاحظه نمود. سایر توابعی که نشان داده نشده‌اند، دارای مقدار صفر می‌باشند.



شکل ۱ شکل توابع پایه به ترتیب از چپ به راست برای درجات صفر و یک و دو

تولید سطوح اسپلاین و نربز. می‌توان یک سطح نربز را که دارای درجه p در جهت u و درجه q در جهت v می‌باشد را با رابطه‌ی (۲) به شکل ذیل محاسبه نمود:

$$\mathbf{S}(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}\mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}\ ,\quad \begin{array}{l}0\le u\le 1\\ 0\le v\le 1\end{array}$$

(۲)

که $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ شبکه‌ی نقاط کنترلی و $\{w_{i,j}\}$ وزن مربوط به آن‌ها می‌باشد. توجه شود که اگر وزن کلیه‌ی نقاط مساوی یک لحاظ شود، آنگاه منحنی‌ها و سطوح تولیدی را با عنوان اسپلاین می‌شناسیم؛ در غیر این صورت، منحنی‌ها و سطوح نربز تولید می‌شوند. هم‌چنین $\{N_{i,p}(u)\}$ و $\{N_{j,q}(v)\}$ توابع پایه غیرگویا اسپلاین (Non-rational B-spline basis function) می‌باشند که بر روی بردارهای (۳) و (٤) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{U}=\{0,...,0,u_{p+1},...,u_{r-p-1},1,...,1\} \qquad (۳)$$

$$\mathbf{V}=\{0,...,0,v_{q+1},...,v_{s-q-1},1,...,1\} \qquad (٤)$$

توجه شود که روابط $r=n+p+1$ و $s=m+q+1$ نیز برقرار می‌باشند و اگر $R_{i,j}^{p,q}(u,v)$ را به شکل رابطه‌ی (۵) تعریف کنیم:

$$R_{i,j}^{p,q}(u,v)=\frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)w_{k,l}} \qquad (۵)$$

اکنون می‌توانیم رابطه‌ی (۵) را به شکل (٦) باز نویسی نماییم:

$$\mathbf{S}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(u,v)\mathbf{P}_{i,j} \qquad (٦)$$

با استفاده از رابطه‌ی (٦) می‌توان هر گونه سطح و رویه‌ی پیچیده‌ای را مدل نمود که در این‌جا در روش ایزوژئومتریک، برای حل مسایل از این فرمول ها برای مدل‌سازی جواب ها استفاده می‌کنیم. اطلاعات تکمیلی در این خصوص از مراجع [11,12] قابل دست‌یابی می‌باشد.

روش ایزوژئومتریک در مقایسه با روش اجزای محدود

روش ایزوژئومتریک در اصل از ترکیب تکنیک‌های طراحی توسط کامپیوتر (Computer Aided Design) (CAD) و روش اجزای محدود حاصل شده است [13-17]. چهارچوب کلی تحلیل ایزوژئومتریک با استفاده از تکنیک نربز در مقایسه با روش اجزای محدود، مبتنی بر اصولی می‌باشد (۱) که عبارتند از:

۱. در این روش به جای المان‌ها، شبه المان‌هایی را داریم که با ضرب بردارهای گره حاصل می‌شوند و باید توجه کرد که به هیچ عنوان مفهوم آن مانند المان‌ها در روش اجزای محدود نمی‌باشد. به عنوان مثال در مسایل دوبعدی مانند مسایل تنش/کرنش مسطح این شبکه المان به صورت $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$ خواهد بود که قبلاً به آن اشاره گردید.
۲. المان‌ها از تقسیم دامنه توسط دهانه های گرهی (Knot spans) به دست می‌آیند.
۳. هندسه مسأله با مشارکت شبکه‌ی نقاط کنترلی و توابع پایه تولید می‌شود.
٤. با استفاده از مفهوم ایزوپارامتریک (Isoparametric) مجهولات مانند تغییرمکان‌ها، تنش‌ها، سرعت، حرارت و غیره را با همان توابع پایه‌ای که برای تعریف هندسه استفاده کرده‌ایم، بیان می‌نماییم.
۵. درجات آزادی عبارتند از متغیرهای کنترلی (Control variables) که همان ضرایب توابع پایه می‌باشند.
٦. روند بهبود شبکه (Mesh refinement) نیز با استفاده از اضافه کردن گره، ارتقای درجه توابع پایه و یا ترکیبی از آن‌ها انجام می‌شود. این عمل، مشابه با روش‌های بهبود h، p و hp در اجزای محدود است. البته روش جدیدی با نام روش بهبود k نیز در

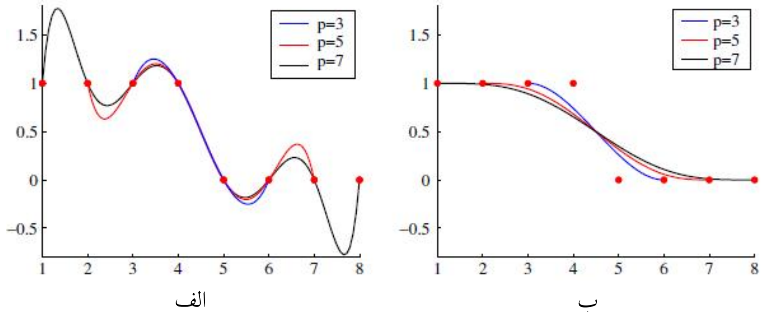
تحلیل ایزوژئومتریک امکان‌پذیر است؛ اما چون مبحث این مقاله نمی‌باشد، توضیح داده نشده که می‌توان برای اطلاع بیشتر به مرجع [1] رجوع نمود.

۷. در مرحله‌ی روی‌هم‌گذاری (Assemble)، همانند روش اجزای محدود، آرایه‌های محاسبه شده برای وصله‌ها (Patches) در تحلیل ایزوژئومتریک در یک آرایه‌ی کلی قرار داده می‌شوند. برای ایجاد سازگاری (Compatibility) بین وصله‌ها، می‌توان از پارامترهای مشابه برای ساخت لبه‌ها یا سطوح دو طرف وصله (Patch Interfaces) استفاده نمود. در جدول (۱) می‌توان مقایسه‌ای بین روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک از دیدگاه مشابهت برخی مشخصه‌های کلیدی در هریک از دو روش را ملاحظه نمود.

پدیده‌ی گیبز در جدول فوق، در واقع ناپایداری ناشی از تقریب زدن داده های ناپیوسته با چند جمله‌ای‌های جبری لاگرانژ می‌باشد که در شکل (۲- الف) نشان داده شده است. هم‌چنین ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد نقاط و در نتیجه درجه‌ی چندجمله‌ای، این نوسان شدیدتر می‌شود. ولی اگر داده‌ها به عنوان نقاط کنترلی در نظرگرفته شوند، استفاده از تکنیک نربز همانند شکل (۲- ب) سبب مشاهده‌ی رفتاری متفاوت در منحنی‌های تولیدی خواهد شد و در واقع میرایی در تغییرات را شاهد خواهیم بود. این خصوصیت سبب می‌شود تا بتوانیم محل هایی را که دارای تغییرات زیادی در هندسه یا جواب‌ها رخ می‌دهد، مدل نماییم [1].

جدول ۱ مقایسه‌ی روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک

روش اجزای محدود	روش ایزوژئومتریک
نقاط گرهی	نقاط کنترلی
متغیرهای گرهی	متغیرهای کنترلی
شبکه‌ی اجزای محدود	مقادیر گره ها در بردار گره
انجام درون‌یابی نقاط و متغیرهای گرهی با توابع پایه	عدم انجام درون‌یابی نقاط و متغیرهای کنترلی با توابع پایه
هندسه تقریبی	هندسه‌ی دقیق
توابع پایه از نوع چندجمله‌ای های جبری	توابع پایه نربز
پدیده‌ی گیبز (Gibbs phenomena)	میرایی تغییرات (Variation diminishing)
زیر دامنه‌ها	وصله ها



شکل ۲ الف) درونیابی لاگرانژ برای داده های ناپیوسته، ب) میرایی تغییرات برای داده های ناپیوسته با تکنیک نربز

به دست آوردن فرمولبندی ایزوژئومتریک

در این بخش پس از دست‌یابی به تجربیاتی در خصوص روش ایزوژئومتریک در کارهای پژوهشی گذشته [18,19]، ابتدا به معرفی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسایل تنش/کرنش مسطح نموده و سپس مراحل دست‌یابی به فرمولبندی روش ایزوژئومتریک برای حل این مسایل بیان می‌شود [2]. همان‌گونه که از تئوری الاستیسیته می‌دانیم، معادلات دیفرانسیل (۷) به طور هم‌زمان بر مسایل تنش/کرنش مسطح حاکم می‌باشند:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+f_x=0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+f_y=0$$

(۷)

در این معادلات، شرایط مرزی طبیعی به صورت روابط (۸) بیان می‌شوند:

$$t_x=\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_x+c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y$$
$$t_y=c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x+\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_y$$

(۸)

در این روابط، c_{ij}ها ضرایب الاستیسیته می‌باشند که با فرض ثابت بودن ضریب پواسون در سراسر دامنه‌ی حل مسأله و تغییرات پیوسته در مقدار مدول الاستیسیته به صورت $E(x,y)$، در حالت کلی برای مسایل تنش مسطح با مصالح ایزوتروپیک FG از روابط (۹) به شکل ذیل:

$$c_{11}=c_{22}=\frac{E(x,y)}{1-\mu^2}\,,\; c_{12}=\frac{\mu E(x,y)}{1-\mu^2}\,,\; c_{66}=\frac{E(x,y)}{2(1+\mu)}$$

(۹)

و در مسایل کرنش مسطح با مصالح ارتوتروپیک از روابط (۱۰) به دست می آیند:

$$c_{11}=\frac{(1-\mu)E(x,y)}{1-\mu-2\mu^2}\;,\; c_{22}=\frac{(1-\mu)E(x,y)}{(1+\mu)(1-\mu-2\mu^2)}\;,$$
$$c_{12}=\frac{\mu E(x,y)}{1-\mu-2\mu^2}\;,\; c_{66}=\frac{E(x,y)}{2(1+\mu)}$$

(۱۰)

در ادامه، جواب مسأله را به صورت روابط (۱۱) برای تغییر مکان $u(r,s)$ و (۱۲) برای تغییر مکان $v(r,s)$ در دامنه‌ی مسأله در نظر می‌گیریم که در واقع از تعریف تولید رویه اسپلاین حاصل شده است و تغییر مکان در دامنه‌ی مسأله در هر نقطه (r,s) متناظر با (x,y) در دامنه مسأله از روی ارتفاع رویه حل استخراج شده که r و s همان پارامترهایی هستند که مقادیرشان از بردار گره حاصل می‌شود:

$$u(r,s)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}U_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)U_{i,j}$$

(۱۱)

$$v(r,s)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}V_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)V_{i,j}$$

(۱۲)

برای مدل‌سازی تغییرات مدول الاستیسیته در دامنه‌ی مسأله نیز از روابطی مانند رابطه‌ی فوق استفاده نموده و ضرایب ماتریس الاستیسیته را با $\overline{c}_{11}(r,s)$، $\overline{c}_{22}(r,s)$، $\overline{c}_{12}(r,s)$ و $\overline{c}_{66}(r,s)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین در کلیه‌ی روابط بایستی به جای x و y نیز از روابط پارامتری مشابه استفاده نموده و آن‌ها را با پارامترهای r و s جایگزین نماییم [2]. اکنون می‌توان تابع‌نمای (Functional) مربوطه را به شکل رابطه‌ی (۱۳) نوشت:

$$\Pi=\frac{1}{2}B(\mathbf{u},\mathbf{u})-l(\mathbf{u}) \qquad (۱۳)$$

که در این رابطه، $\mathbf{u}$ بردار تغییر مکان و

$B(\mathbf{u},\mathbf{u})$ و $l(\mathbf{u})$ بـه ترتیـب بخـش‌هـای دوخطـی (Bilinear) و خطی (Linear) تابع‌نما طبـق روابـط (١٤) و (١٥) می‌باشند.

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u}) = h_{patch}\iint_{\Omega_{patch}} [\bar{c}_{11}(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 2\bar{c}_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \bar{c}_{22}(\frac{\partial v}{\partial y})^2 + \bar{c}_{66}((\frac{\partial u}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + (\frac{\partial v}{\partial x})^2)]Jdrds \qquad (١٤)$$

و

$$l(\mathbf{u}) = -h_{patch}\iint_{\Omega_{patch}} (uf_x + vf_y)dxdy - h_{patch}\oint_{\Gamma_{patch}} \left(ut_x + vt_y\right)d\Gamma \qquad (١٥)$$

زیرنویس patch در ایـن‌جـا مشـابه روش اجـزای محدود که برای المان‌ها استفاده می‌شود، برای وصله‌هـای تشکیل دهنده‌ی هندسه‌ی مسـأله اسـتفاده شـده اسـت. هم‌چنین از پارامتر Γ برای انتگرال‌گیـری روی مرزهـا و از پارامتر Ω برای انتگرال‌گیری روی سطح اسـتفاده شـده است. t_x و t_y نیروهای خـارجی (Traction forces) و پارامتر h نیز ضخامت هر وصله می‌باشد.

پـس از نوشـتن شـکل ضـعیف معـادلات و محاسـبه‌ی ژاکـوبین هـای مـورد نیـاز (٢) بـه دسـتگاه معادلاتی به شکل رابطه‌ی (١٦) می‌رسیم که بـا حـل آن می‌توان مختصات ارتفاع نقـاط کنترلـی را بـرای تولیـد رویه جواب محاسبه نمود. سپس بـا اسـتفاده از فرمـول تولید رویه و تکنیک معکوس نربز می‌توان مقدار تغییـر مکان برای هر نقطه‌ی دلخواه از مسأله و یـا کانتورهـای تنش و تغییر مکان را برای مسأله به دست آورد:

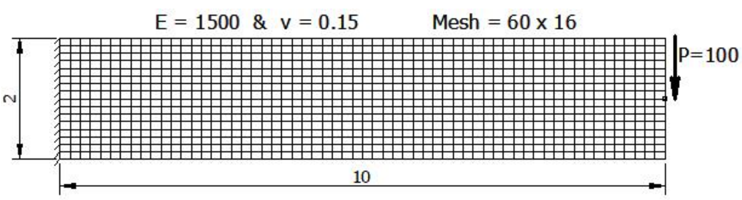
$$[\mathbf{K}]\{U\} = \{F\} \qquad (١٦)$$

که در این رابطـه، $[\mathbf{K}]$؛ مـاتریس ضـرایب، $\{F\}$؛ بردار نیروها و $\{U\}$؛ بردار تغییرمکـان‌هـا مـی‌باشـند. در ادامه با حل مثال، کیفیت و توانمندی و دقت جـواب‌هـا در روش مذکور نشان داده شده است.

حل مثال‌ها

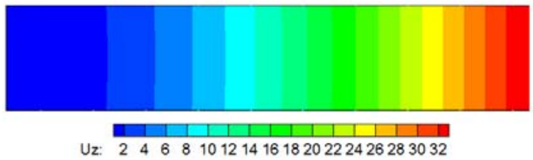
در این بخش دو مثال حل شده اسـت کـه در مثـال اول برای نشان دادن توانمنـدی و صـحت نتـایج تحلیـل بـا روش ایزوژئومتریک و مقایسه‌ی نتایج بـا روش اجـزای محدود، مسأله به صورت ایزوتروپیک و بدون تغییـرات در مدول الاستیسیته حل شده است. در مثال دوم، مسأله در حالت مرکـب و مصـالح FG حـل و در مـورد نتـایج بحث شده است.

مثال ١: در این مثـال، فـرض شـده اسـت کـه صـفحه‌ی مستطیلی با اتصال گیردار در یک انتها و در حالت تنش مسطح تحت اثر بار متمرکز ١٠٠.٠ در انتهای آزاد خـود در گره مشخص شـده در شـکل (٣) قـرار دارد. مقـدار مدول الاستیسیته در کـل دامنـه برابـر بـا مقـدار ثابـت ١٥٠٠.٠ و مقدار ضریب پواسون برابـر بـا 0.15 فـرض شده است. همان‌طور که در شکل (٣) دیـده مـی‌شـود، ابعاد تیر ١٠ در ٢ با ضخامت واحد فرض شده است که ابتدا با روش اجزای محدود و با تقسـیم دامنـه بـه ٩٦٠ المان چهار گرهی حل شده است. ملاحظه می‌شـود کـه در روش اجـزای محـدود، حـل مسـأله منجـر بـه حـل دسـتگاه معـادلاتی بـا حـدود ١٠٠٠ معادلـه و مجهـول خواهد شد. سپس با استفاده از نرم افزار تهیـه شـده بـا روش ایزوژئومتریک نیز مسأله مجدداً حـل و نتـایج بـا روش اجزای محدود مقایسه شده است.



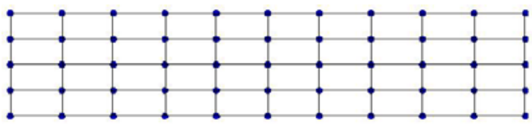
شکل ٣ شبکه بندی اجزای محدود و سایر مشخصات مثال ١

نتیجه تحلیل مسأله برای تغییر مکان قائم u_z صفحه مستطیلی با روش اجزای محدود در شکل (٤) نشان داده شده است.



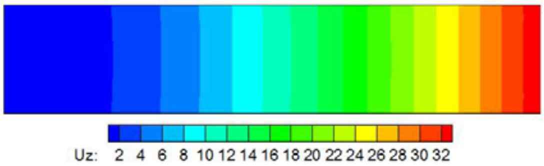
شکل ٤ تحلیل اجزای محدود مثال ۱

البته مسألهی مذکور با تعداد المانهای بیشتر نیز حل شده که اساساً تغییر معناداری در جوابها حاصل نشده است. اکنون مسألهی فوق را با روش ایزوژئومتریک و با تعداد ۵۵ نقطهی کنترلی مطابق شکل (۵) حل میکنیم. با دقت در شکل (۵) نتیجه میگیریم که هر مستطیل یک المان نیست و اصلاً در این خصوص شباهتی بین اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک وجود ندارد. در واقع، المانهای روش ایزوژئومتریک از حاصلضرب بردارهای گرهی به دست میآید. در حالت کلی گره ها در اجزای محدود بر روی دامنه قرار میگیرند؛ در حالی که در روش ایزوژئومتریک نقاط کنترلی میتوانند بر روی دامنه نباشند.



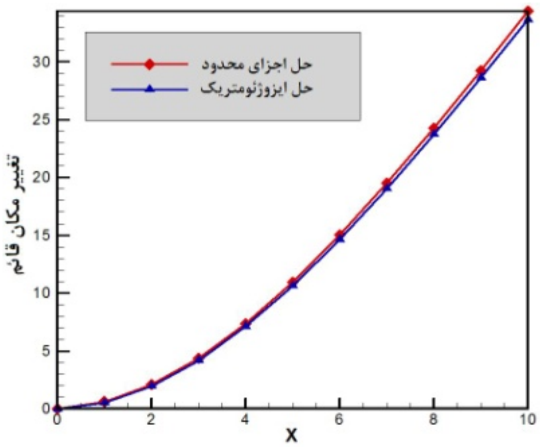
شکل ۵ شبکهی نقاط کنترلی در صفحهی مستطیلی

بردار گره برای جهت طولی برابر با {۱و۱و۱و۰.۷۵و۰.۵و۰.۲۵و۰و۰و۰} و برای جهت عرضی برابر با {۱و۱و۱و۰.۶۶و۰.۳۳و۰و۰و۰} در نظر گرفته شده است. همچنین درجه توابع پایه اسپلاین در این مسأله مساوی دو لحاظ گردیده است. نتیجهی تحلیل ایزوژئومتریک با شرایط ذکر شده، در شکل (٦) نشان داده شده است.



شکل ٦ تحلیل ایزوژئومتریک مثال ۱

همانگونه که از روی کانتورهای شکلهای (٤) و (٦) ملاحظه میشود، نتایج تحلیل، بسیار به یکدیگر شبیه است که این مسأله برای تغییر شکل قائم محور میانی صفحهی مستطیلی فوق در شکل (۷) نشان داده شده است:

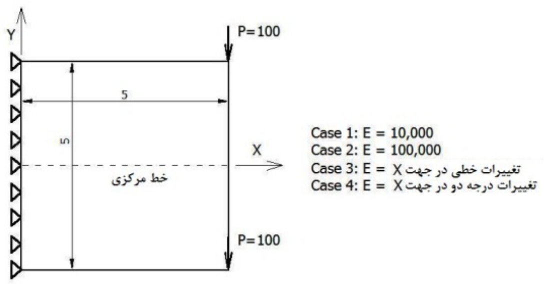


شکل ۷ مقایسه نتایج روش اجزای محدود با روش ایزوژئومتریک

توجه شود که در واقع در تحلیل ایزوژئومتریک فقط از ۱۲ المان که در واقع از حاصلضرب تعداد دهانههای گرهی حاصل میشود، استفاده شده است؛ در حالی که در روش اجزای محدود از ۹٦۰ المان چهار گرهی استفاده شده است که حدود ۸۰ برابر بیشتر است. همچنین در روش تحلیل ایزوژئومتریک، تعداد مجهولات گرهی در حدود ۱۰۰ و در اجزای محدود در حدود ۱۰۰۰ است که باز ملاحظه میشود تغییرات قابل ملاحظهای در ابعاد دستگاه معادلات نهایی ایجاد شده است که سبب افزایش سرعت و دقت حلّ مسأله در

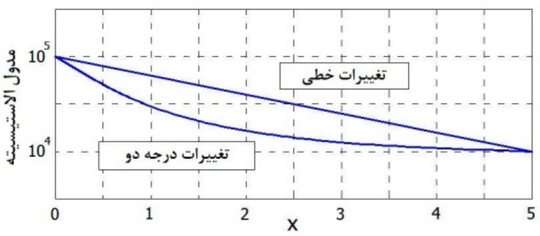
روش ایزوژئومتریک شده است. هم‌چنین در روش اجزای محدود برای مدل‌سازی تکیه‌گاه فقط نقاط تکیه‌گاهی گیردار می‌شوند که از معایب و ضعف‌های روش اجزای محدود محسوب می‌شود، در حالی که در روش ایزوژئومتریک کل وجه سمت چپ صفحه مستطیلی به صورت سراسری و پیوسته به صورت گیردار مدل می‌شود که باز تفاوت در دقت مدل‌سازی نسبت به روش اجزای محدود، روشن خواهد بود.

مثال ۲: در این مثال، مطابق شکل (۸) یک صفحه‌ی مربعی به ابعاد پنج در پنج با ضخامت واحد تحت اثر دو بار متمرکز در انتهای آزادش قرار دارد. به دلیل این‌که حل مسایل با مصالح FG در روش اجزای محدود مشکل است و برای این‌که از صحت جواب‌ها مطمئن باشیم، این مسأله با یک روند منطقی و در چهار حالت مجزا حل شده است.



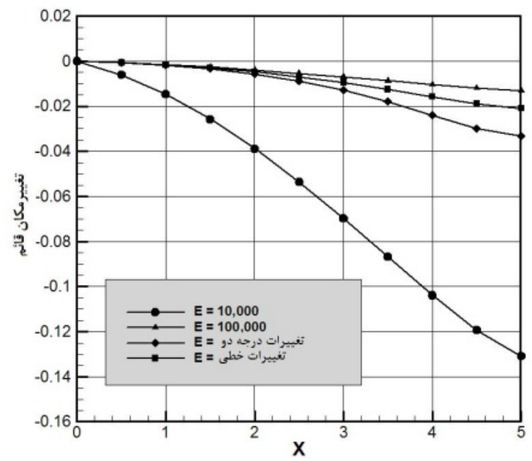
شکل ۸ صفحه‌ی مربعی با چهار حالت مجزا در توزیع مدول الاستیسیته

در حالت اول و دوم فرض شده است که مدول الاستیسیته در کل دامنه ثابت بوده و مقادیر آن به ترتیب؛ ۱۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ لحاظ شده است. در واقع، علت این فرض به دلیل داشتن نتایج تحلیل مسأله برای دو حالت حدی می‌باشد. سپس در حالت سوم، فرض شده است که مدول الاستسیته از ۱۰۰۰۰۰ به ۱۰۰۰۰ به صورت خطی تغییر می‌کند؛ به طوری‌که مقدار ماکزیمم در سمت تکیه گاه قرار دارد. در حالت چهارم نیز فرض شده است که این تغییرات به صورت درجه دو می‌باشد. شکل (۹) ملاحظه شود.



شکل ۹ تغییرات خطی و درجه دو مدول الاستیسیته

همان‌گونه که به طور منطقی انتظار می‌رود، بایستی جواب‌های مراحل سه (با تغییرات خطی) و چهار (با تغییرات درجه دو) بین دو حالت حدی یک و دو قرار داشته باشد. با ترسیم نتایج تغییر مکان خط مرکزی این صفحه مستطیلی مطابق شکل (۱۰) نتایج قابل ملاحظه می‌باشد.



شکل ۱۰ نتایج تغییر مکان قائم محور صفحه مربعی برای چهار حالت متفاوت

هم‌چنین ملاحظه می‌شود که با توجه به سختی بالاتر مسأله در حالت سوم با توزیع خطی مدول الاستیسیته، انتظار می‌رود که نتایج آن بین حالت دوم و چهارم قرار بگیرد که این مسأله نیز در شکل، قابل ملاحظه است. در انتها می‌توان گفت که روش ایزوژئومتریک، توانمندی بالایی در حل مسایل الاسیتیسیته؛ به خصوص مسایل FG دارد که برای

آشنایی بیشتر با برخی از توانمندی‌های این روش، می‌توان به مراجع [18,19] رجوع نمود.

نتیجه‌گیری

روش اجزای محدود، روشی شناخته شده و توانمند در تحلیل مسایل سازه و مکانیک می‌باشد؛ ولی با توجه به برخی از محدودیت‌های این روش، روش‌های دیگری مانند روش‌های بدون شبکه و روش ایزوژئومتریک برای پوشش ضعف‌های آن در سال‌های اخیر ارائه شده‌است. با توجه به این‌که روش ایزوژئومتریک در ابتدای راه تکامل خود قرار دارد و هنوز در هیچ‌یک از نرم افزارهای تجاری در جهان مورد استفاده قرار نگرفته است، ولی پتانسیل بالای این روش در حل مسایل پیچیده‌ی مکانیک و سازه، سبب ارتقا و عمومی شدن این روش در زمان کوتاهی خواهد شد. از مزایای این روش که در حل مسایل مشاهده شد، می‌توان به راحتی، سرعت و دقت بالای مدل‌سازی هندسه و مصالح، نسبت به روش اجزای محدود، عدم نیاز به شبکه بندی دامنه‌ی مسأله، کاهش ابعاد دستگاه معادلات و برآورده شدن دقیق شرایط مرزی در مدل‌سازی مسأله اشاره نمود. به عنوان پیشنهاد می‌توان از این روش در بهینه سازی توپولوژی و شکل سازها (Structural Shape and Topology Optimization) با توجه به کاهش چشم‌گیر متغیرهای طراحی و تولید شکل‌های بسیار عملی‌تر با مرزهای یکنواخت (Smooth boundaries) و یا حل مسایل با مصالح FG (Functionally Graded Materials) که انجام هر کدام با روش اجزای محدود دارای ضعف‌های مشهودی می‌باشد، استفاده نمود.

مراجع

1. Hughes, T. J. R., and Cottrell, J.A., “Bazilevs Y.Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement”, Computers Method in Applied Mechanics and Engineering, 194 pp. 4135–4195, (2005).
2. Hassani, B., and Moghaddam, N.Z., “Development of a new numerical method for solution of ordinary differential equations by using spline basis functions”, Shahrood University of Technology, Technical Report No. 1015, Shahrood, Iran, (2009).
3. Shiota, I., and Miyamoto, Y., “Functionally graded materials 1996”, 1st Ed., ELSEVIER SCIENCE B.V., Proceedings of the 4th international symposium on Functionally Graded Materials, AIST Tsukuba Research center, Tsukuba, Japan, (1996).
4. Niino, M., and Maeda, S., “Recent development status of functionally gradient materials”, ISIJ International 30 pp. 699–703, (1990),
5. Huang, Z. Y., and Lu, C. F., and Chen, W. Q., “Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, Composite Structures 85 pp.95–104, (2008).
6. Wu, T. L., and Shukla, K. K., and Huang, J. H., “Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates”, Composite Structures 81 pp. 1–10, (2007).

7. Matsunaga, H., "Free vibration and stability of functionally graded circular cylindrical shells according to a 2D higher-order deformation theory", Composite Structures 88 pp.519–531, (2009).
8. Dag, S., and Yildirim, B., and Sarikaya, D., "Mixed-mode fracture analysis of orthotropic functionally graded materials under mechanical and thermal loads", *Int. Journal of Solids and Structures 44 pp.* 7816–7840, (2007).
9. Lipton, R., "Design of functionally graded composite structures in the presence of stress constraints", *Int. Journal of Solids and Structures 39 pp.* 2575–2586, (2002).
10. Ootao, Y., and Tanigawa, Y., and Ishimaru, O., "Optimization of material composition of functionally graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm", *J. Therm. Stresses 23 pp.* 257–271, (2000).
11. Piegl, L., and Tiller, W., "The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)", 2nd ed., Springer-Verlag, New York, pp. 81-227, (1997).
12. Rogers, D. F., "An Introduction to NURBS: With Historical Perspective", 2nd ed., Morgan Kaufmann Publishers, pp. 12-87, (2001).
13. Cottrell, J. A., and Hughes, T. J. R., and Reali, A., "Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196, pp. 4160–4183, (2007).
14. Bazilevs, Y., and BeiraoDaVeiga, L., and Cottrell, J., and Hughes, T.J.R., and Sangalli, G., "Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes", Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 16, pp. 1031–1090, (2006).
15. Bazilevs, Y., and Calo, V., and Cottrell, J., and Hughes, T. J. R., and Reali, A., and Scovazzi, G., "Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows", Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.197 (1–4), pp. 173–201, (2007).
16. Bazilevs, Y., and Calo, V., and Zhang, Y., and Hughes, T.J.R., "Isogeometric fluid structure interaction analysis with applications to arterial blood flow", Comput. Mech. 38 (4) pp. 310–322, (2006).
17. Cottrell, J. A., and Reali, A., and Bazilevs, Y., and Hughes, T. J. R., "Isogeometric analysis of structural vibrations", Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 195 (41–43), pp. 5257–5296, (2006).
18. Hassani, B., and Khanzadi, M., and Tavakkoli, S. M., and Moghaddam, N. Z., "Isogeometric shape optimization of three dimensional problems", 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Lisbon, Portugal, (2009).
19. Hassani, B., and Moghaddam, N. Z., and Tavakkoli, S. M., "Isogeometrical solution of Laplace equation", *Asian journal of civil engineering (building and housing),* 10(6), pp. 579-592, (2009).